Introducción a las Señales
Definición y Clasificación.
Capítulo 1. (versión 1)

Prof. José Ferrer   Br. Alejandro Pérez
Br. Gabriel Marzinotto
Departamento de Procesos y Sistemas
Universidad Simón Bolívar

April 29, 2013

Abstract

En estas notas se presentan los conceptos de bases o ejes de tiempo y su clasifiación; también, se define matemáticamente las señales y su clasificación de acuerdo a la naturaleza de la base de tiempo y del rango de valores de estas.

1 Introducción a las Señales

Señal es un término que proviene del latín signālis. Se trata de un signo, seña, marca o medio que informa, avisa o advierte algo. Este aviso permite dar a conocer una información, realizar una advertencia o constituirse como un recordatorio.

Las señales son convencionales; es decir, obedecen a ciertas características para que puedan ser reconocidas por la mayor cantidad de gente posible. Deben ser ubicadas en lugares visibles para estar en condiciones de llamar la atención.

Las señales de tráfico o tránsito son aquellas que organizan y regulan los desplazamientos de los vehículos. Están ubicadas en las calles o carreteras y señalan la velocidad máxima permitida, la prohibición del paso, la obligatoriedad de detención y otras cuestiones vinculadas al tránsito.

Una señal también puede ser un gesto que realiza una persona para advertir a otra una determinada circunstancia. Este tipo de señal puede ser hecha mediante un movimiento de manos o de los brazos.

Para la física y la ingeniería, una señal es una variación de la corriente eléctrica o de otra variable que se utiliza para transmitir información. Por ejemplo: “El teléfono no tiene señal”, “La señal indica que el teléfono está ocupado en este momento”.

De lo arriba expuesto, una señal es la incorporación física de un mensaje. La música, el video y el texto son ejemplos de mensajes enviados por personas. La naturaleza también transmite mensajes. Estos mensajes naturales pueden ser clasificados por el hombre o la mujer como deseables o indeseables, dependiendo completamente de si ayudan o interfieren con lo que él o ella está trantando de hacer.

La palabra señal tal como lo mencionamos puede designar una variable física, el tiempo de variación de la variable, o alguna característica de esa variación temporal (o espacial). En circuitos y sistemas electrónicos las señales de interés son usualmente el voltaje o la corriente, aunque también pueden ser de interés la carga en un condensador o el flujo magnético en una bobina. Sin embargo, hoy en día el interés de las señales para los ingenieros electrónicos incluye a las que proviene o surgen de una manera natural o artificial en otros campos. Para ilustrar este último comentario, son señales de interés:

- Ondas sónicas, ondas de presión, la velocidad, la aceleración y la posición longitudinal o rotacional de un cuerpo, vibraciones mecáncias en edificios en los sistemas mecánicos.
- La concentración, el ph, la temperatura, la presión, entalpía, etc. en procesos químicos.
- La presión sanguínea, frecuencia cardíaca, radiografías pulmonaes, etc. en los sistemas bioelectrónicos.
- Número de unidades aéreas, tasa de despeje y aterrizaje, tiempo de vuelo, ruta de vuelo en los sistemas de transporte aereo.
- Mensajes sms, mms, fotografías, correos electrónicos etc. en los sistems de telefonía móvil.
- Número de clientes en cola, tasa de llegada de clientes, tiempo promedio de atención a cliente en un servidor, etc. para sistemas bancarios.

Los sistemas electrónicos o de cualquier otra índole (como los arriba mencionados) se diseñan para efectuar operaciones lineales o no lineales sobre un conjunto de señales de entrada para producir un conjunto de señales de salida, el cual podrá diferir del conjunto original de entrada en cierta forma deseable y el que también diferirá inevitablemente del original de una forma indeseable.

Mientras que un ejemplo típico de una señal de tiempo discreto es aquella que se obtiene mediante el muestreo de una señal de tiempo continuo *como* se muestra a continuación

Nuestro objetivo en estas notas es básicamente definir de una manera formal a señales físicas como a las arriba mencionadas de tal manera que podamos caracterizarlas analíticamente tal como se usan en comunicaciones, control y mecatrónica.

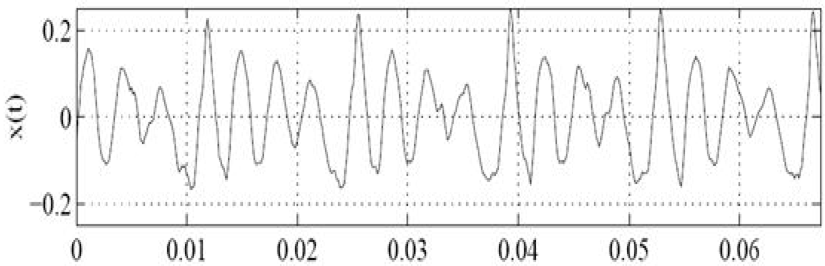


Figure 1: Señal típica analógica de tiempo contínuo

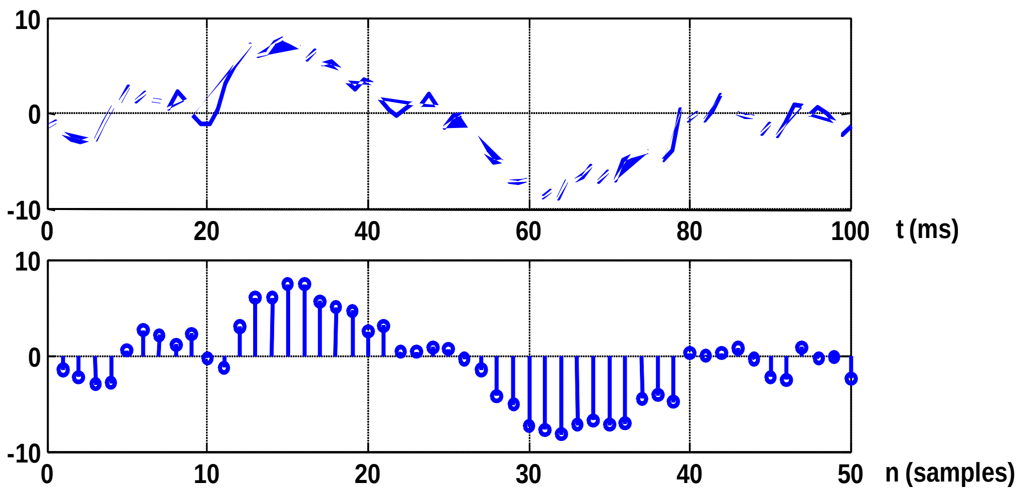


Figure 2: Señal de eje de tiempo discreto

Recordemos algunos conceptos básicos de mátematicas que resultarán de gran importancia en nuestro estudio de señales y sistemas.

Sean A, B dos conjuntos no vacíos, entonces el **producto cartesiano** de los conjuntos A, B es el conjunto

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Por ejemplo si $A = \{x, y\}$ y $B = \{0, 1\}$, entonces $A \times B = \{(x, 0), (x, 1), (y, 0), (y, 1)\}$. Mientras que $A^2 = A \times A = \{(x, x), (x, y), (y, x), (y, y)\}$.

Una **relación entre los conjuntos** A, B, la cual se representará como $R(A, B)$, no es mas que un subconjunto dado de $A \times B$. Esto es,

$$R(A, B) \subset A \times B$$

y en este caso ya que sólo involucra dos conjuntos A, B, decimos que la relación es una **relación binaria**. Si $A = B$ diremos que R es una relación binaria sobre A.

Ejemplo Sea $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. El producto cartesiano $A \times A$ contiene 100 elementos $(1,1), (1,2), (1,3), \cdots, (10,10)$. Construyamos una relación $R(A,A) \subset A \times B$ mediante la proposición $(a,b) \in R(A,A)$ si a y b tienen el mismo resto cuando se dividen por 3. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a &= 3n + r \\ b &= 3m + r \end{aligned}$$

para algunos enteros $n, m \in \{1, 2, 3\}$. Entonces con un poco de paciencia es posible determinar que

$$\begin{aligned} R(A,A) = \{&(1,1), (1,4), (4,1), (1,7), (7,1), (1,10), (10,1), (4,4), \\ &(4,7), (7,4), (4,10), (10,4), (7,7), (7,10), (10,7), (10,10), \\ &(2,2), (5,5), (8,8), (2,5), (5,2), (2,8), (8,2), (5,8), (8,5), \\ &(3,3), (6,6)\,(9,9), (3,6), (6,3), (3,9), (9,3), (6,9), (9,6)\} \end{aligned}$$

DEFINICION 1 *Para cada relación binaria $R(A,B)$ desde un conjunto A hasta un conjunto B, el dominio $dom(R)$ y el rango $imag(R)$ se definen a continuación.*

1. *El dominio, $dom(R)$, es el conjunto de esos elementos de A que aparecen como la primera componente de un par $(a,b) \in R(A,B)$, es decir*

   $$dom(R) = \{a \in A : (a,b) \in R \text{ para algún } b \in B\}$$

   Evidentemente, $dom(R) \subset A$.

2. *El rango, $ran(R)$, es el conjunto de todos aquellos elementos de B que aparecen como la segunda componente de un par $(a,b) \in R$. Es decir,*

   $$imag(R) = \{b \in B : (a,b) \in R \text{ para algún } a \in A\}$$

   Evidentemente, $imag(R) \subset B$.

En general, a una relación binaria $R(A,B) \subset A \times B$ se representa como

$$R : A \to B$$

Consideremos el ejemplo que sigue:

$$\begin{aligned} A &= \{A_1, A_2\} = \{\{0,1,2\}, \{3\}\} \\ B &= \{B_1, B_2\} = \{\{\gamma, e\}, \{\omega, \delta\}\} \end{aligned}$$

y suponga que

$$R(A,B)=\{\{\{0,1,2\},\{\gamma,e\}\},\{\{0,1,2\},\{\omega,\delta\}\}\}$$

Evidentemente

$$\begin{aligned} dom(R) &= \{\{0,1,2\}\}\subset A \text{ y } dom(R)\neq A \\ imag(R) &= \{\{\gamma,e\},\{\omega,\delta\}\} \end{aligned}$$

DEFINICION 2 *Para una relación binaria dada $R(A,B)$ entre los conjuntos A y B, se define la relación inversa $R^{-1}(A,B)$ como*

$$R^{-1}(A,B)=\{(y,x)\in B\times A:((x,y)\in R(A,B))\}$$

Es inmediato de la definición de relación inversa que

$$\begin{aligned} dom\left(R^{-1}\right) &= imag(R) \\ imag\left(R^{-1}\right) &= dom(R) \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 *Sea $A=\{1,2,3\}$, $B=\{x,y,x\}$, y*

$$R(A,B)=\{(1,x),(1,z),(2,y),(3,x),(3,y),(3,z)\}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} dom(R) &= \{1,2,3\} \\ imag(R) &= \{x,y,z\} \end{aligned}$$

Mientras que

$$R^{-1}(A,B)=\{(x,1),(z,1),(y,2),(x,3),(y,3),(z,3)\}$$

y

$$\begin{aligned} dom\left(R^{-1}\right) &= \{x,y,z\}=B=imag(R) \\ imag\left(R^{-1}\right) &= \{1,2,3\}=A=dom(R) \end{aligned}$$

DEFINICION 4 *Una relación binaria $R(A,A)$ sobre A se denomina:*

1. ***reflexiva*** *si para cada $a\in A$, el par $(a,a)\in R(A,A)$,*
2. ***simétrica*** *si cuando $(a,b)\in R(A,A)$, entonces también $(b,a)\in R(A,A)$,*
3. ***antisimétrica*** *si $(a,b)\in R(A,A)$ y $a\neq b$, entonces $(b,a)\notin R(A,A)$,*

4. ***transitiva*** *si siempre que* $(a,b) \in R(A,A)$ *y* $(b,c) \in R(A,A)$, *entonces* $(a,c) \in R(A,A)$.

EJEMPLO 5 1. *Sea* $A = \Re = (-\infty, +\infty)$ *y defina sobre* $\Re$ *la relación*

$$a \leq b \Longleftrightarrow b - a \geq 0$$

entonces $\leq$ *es reflexiva ya que para todo* $a \in \Re$, $a - a = 0 \geq 0$, *y por lo tanto* $a \geq a$.

2. *Sea* $A = \Re = (-\infty, +\infty)$ *y defina sobre* $\Re$ *la relación*

$$aRb \Longleftrightarrow |b| = |a|$$

donde

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Entonces, R *es simétrica, reflexiva y transitiva.*

3. *Sea* $X = \{1, 2, 6\}$ *y denote por* A *al conjunto de todos los subconjuntos de* X, *es decir,* $A = pow(X) = 2^X$*:*

$$A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, X\}$$

y defina para todo $a, b \in A$, *la relación*

$$aRb \Leftrightarrow a \subset b$$

No es difícil ver que R *es antisimétrica, reflexiva y transitiva por las propiedades de inclusión de conjuntos.*

4. *Sea* $A = (-\infty, +\infty)$ *y defina la relación "*R*" sobre* A *mediante* $a, b \in A$,

$$aRb \Leftrightarrow a < b$$

Es evidente que R *es transitiva, no es reflexiva y tampoco simétrica.*

DEFINICION 6 *Sea* R *una relación sobre un conjunto* A *no vacío. Entonces* R *es una* ***relación de orden parcial (r.o.p) sobre*** A *si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. En cuyo caso, se acostumbra a representarla por el signo "* $\leq$ *", y al hecho* $(a,b) \in R(A,A)$ *se representa como* $a \leq b$, *y decimos que a* ***precede*** *b.Un conjunto* A *conjuntamente con una relación de orden parcial se dice ser un* ***conjunto parcialmente ordenado o "CPO"*** *y se denota por* (A, R).

Es importante no confundir al símbolo "$\leq$" de la r.o.p con la relación "menor o igual" empleada para comparar números generalmente; aunque es evidente que la relación "menor o igual" es una relación de orden parcial.

Una relación de orden parcial se emplea generalmente para establecer un orden secuencial en un conjunto el cual puede o no poseer un ordenamiento natural de sus elementos. Ilustremos una posible aplicación elemental del concepro de r.o.p.

EJEMPLO 7 *Considere el proceso de mejorar la infraestructura física de uno de los viejos edificios de Pabellones de la USB. Dicho proceso pudiera estar constituido por varias acciones o actividades a realizar:*

- *Remover el asbesto en los techos.*
- *Reemplazar las ventanas destruidas por unas nuevas.*
- *Pintar las paredes.*
- *Reacondicionar el piso.*
- *Asignar las oficinas al personal académico-administrativo.*
- *Dotar las oficinas de mobiliario.*

Es claro que algunas acciones deben realizarce antes que alguna otra pueda incluso comenzar. Por ejemplo, remover el asbesto debe ser lo primero que se lleve a cabo; pintar las paredes debe ser antes de reacondicionar el piso para evitar que este se manche, etc. Por otro lado, muchas cosas pueden realizarce concurrentemente como por ejemplo, es posible pintar las paredes en paralelo con el reemplazo de las ventanas en malas condiciones, y la asignación de las oficinas puede hacerse en cualquier momento. Tal proceso puede cómodamente modelarse con el uso de relaciones parciales.

DEFINICION 8 *Dos elementos a, b de un CPO $(A, \leq)$ se dicen ser* ***comparables*** *si al menos una de las aseveraciones $a \leq b$ o $b \leq a$ es cierta. Cuando ninguna de las aseveraciones mencionadas es cierta, decimos que los elementos $a, b \in A$, son* ***incomparable****s.*

EJEMPLO 9 *Considere nuevamente el ejemplo anterior, donde representamos cada una de las actividades del proceso de remodelación mediante un símbolo:*

- $a :=$ *"Remover el asbesto en el techo",*
- $b :=$ *"Reemplazar las ventanas destruidas por unas nuevas",*
- $c :=$ *"Pintar las paredes",*
- $d :=$ *"reacondicionar el piso",*

- *e := "Asignar las oficinas al personal académico-administrativo",*

- *f := "Dotar las oficinas de mobiliario".*

Entonces podemos definir sobre el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ la relación parcial de orden $\leq$ mediante $x, y \in A$, están relacionados $x \leq y$ si x debe realizarce primero que y. En consecuencia, $a \leq y$ para todo $y \in A$, $c \leq d$ y algunos elemenos no son comparables como por ejemplo b y c ya que cualquiera puede llevarse a cabo antes, después o concurrentemente (en paralelo).

DEFINICION 10 *Si $(A, \leq)$ es CPO y cada par de elementos $a, b \in A$ son comparables, entonces A es un **conjunto totalmente ordenado**. En cuyo caso, se dice que $\leq$ es una **relación de orden total** sobre A.*

EJEMPLO 11 *La relación $\leq$:= "menor igual" sobre el conjunto de todos los enteros Z, es una relación de orden total ya que dados dos enteros $m, n \in Z$, entonces*

$$m \leq n \text{ o } n \leq m$$

o ambas, en cuyo caso $a = b$.

Consideremos con aún mas detalle la noción de relación de orden parcial $\leq$ sobre un conjunto A. Los siguientes conceptos serán de importancia:

DEFINICION 12 *Dado un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$, los siguientes conceptos son de importancia:*

*1) Si $a \in A$ y $a \leq x$ para cada $x \in A$, entonces el elemento a se denomina el **primer elemento** de A con respecto a $\leq$.*

*2) Si $x \leq b$ para cada $x \in A$, entonces el elemento b se denomina el **último elemento** de a con respecto a $\leq$.*

*3) Si $c \in A$ y $x \leq c$ implica que $x = c$, entonces el elemento c se denomina el **mínimo elemento** de A con respecto a $\leq$.*

*4) Si $d \in A$ y $d \leq x$ implica que $x = d$, entonces el elemento d se denomina el **máximo elemento** de A con respecto a $\leq$.*

Son consecuencia directa de las definiciones dadas los siguientes resultados sobre relaciones de orden parcial sobre un conjunto dado.

Hechos sobre relaciones parciales

1. Dado un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$, entonces existe un único primer y último elemento de A con respecto a $\leq$.

2. Dado un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$, entonces existen únicos máximo y mínimo elementos de A con respecto a $\leq$.

3. Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado, entonces si existe el primer elemento, entonces hay solamente un elemento mínimo que coincide con el primer elemento, similarmente, si existe el último elemento, entonces hay solamente un elemento máximo que es idéntico con el último elemento.

DEFINICION 13 *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y un subconjunto $B \subset A$. Entonces:*

1. *Si $a \in A$ y $a \leq x$ para todo $x \in B$, entonces a es una* ***cota inferior*** *de A con respecto a $\leq$.*

2. *Si $b \in A$ y $x \leq b$ para todo $x \in B$, entonces b es una* ***cota superior*** *de A con respecto a $\leq$.*

3. *Si existe una cota inferior, a^*, de A que domina a cualquier otra cota inferior de dicho conjunto, entonces se denominara la* ***máxima cota inferior*** *de A. Es decir,*
$$a^* = g.l.b \ \ (A)$$

4. *Si existe una cota superior, b^*, de A que es dominado a cualquier otra cota superior de dicho conjunto, entonces se denominara la* ***mínima cota superior*** *de A. Es decir,*
$$b^* = l.u.b \ \ (A)$$

DEFINICION 14 *Un CPO $(A, \leq)$ se dice estar bien ordenado si es un CPO con $\leq$ una relación de orden total y todo subconjunto de A tiene un elemento más pequeño.*

EJEMPLO 15 *El conjunto de los números naturales N con respecto a la relación de orden parcial " $\leq$ " estándard, $(N, \leq)$ es un conjunto bien ordenado ya que $\leq$ es una relación de orden total y b) cualquier subconjunto de N tiene un elemento más pequeño.*

DEFINICION 16 *Se dice que la relación R sobre A es una* ***relación de equivalencia sobre*** *A si es reflexiva, simétrica y transitiva. En cuyo caso, para cada $a \in R(A, A)$, el conjunto*
$$[a] = \{x \in A : (a, x) \in R(A, A)\}$$
se denomina la ***clase de equivalencia*** *de a para la relación $R(A, A)$,*

Si R es una relación de equivalencia sobre A, y $(a, b) \in R$, diremos que a es equivalente a b bajo R y escribimos $a \sim b$ o aRb. Bajo esta notación, una relación sobre A es una relación de equivalencia si para todo $a, b, c \in A$
$$\begin{aligned} a &\sim a, \\ a &\sim b \Rightarrow b \sim a, \\ a &\sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c, \end{aligned}$$

y en particular
$$[a] = \{x \in A : x \sim a\}.$$

Sea R una relación de equivalencia (la cual podemos también denotar por $\sim$) sobre A. La clase de todas las clases de equivalencia en A se denota por A/R o $A/\sim$ y se denominará la **clase cociente** de A de (o inducida por) R. Ya que R es reflexiva, $a \in [a]$ para cada $a \in A$; en consecuencia

$$[a] \neq \emptyset, \text{ para cada } a \in A,$$

y
$$\bigcup_{a \in A} [a] = A = \bigcup_{[a] \in A/R} [a].$$

Note además que
$$[a] = [b] \Longleftrightarrow a \sim b$$

ya que si $[a] = [b]$, entonces $a \in [a] \Rightarrow a \in [b] \Rightarrow a \sim b$. En el otro sentido, si $a \sim b$ y $c \in [a]$, entonces $a \sim b$ y $c \sim a$, y por lo tanto empleando las propiedades de reflexividad y transitividad, $c \sim b \Rightarrow c \in [b]$ y $[a] \subset [b]$ un similar argumento demuestra que $[b] \subset [a]$, y por lo tanto, $[a] = [b]$.

Por otro lado, si $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, entonces existe al menos un elemento $c \in [a] \cap [b]$. En consecuencia, $c \sim a$ y $c \sim b$. Usando las propiedades de simetría y transitividad de una relación de equivalencia, tenemos: $a \sim c$ y $c \sim b \Rightarrow a \sim b \Rightarrow [a] = [b]$. Se ha demostrado entonces que

$$\text{Para todo } a, b \in A, [a] \cap [b] = \emptyset \text{ o } [a] = [b]$$

EJEMPLO 17 *En un conjunto cualquiera X, definimos la relación xRy si $x = y$. Entonces, para cada $x \in X$, $[x] = \{x\}$. Observemos que en este caso, $R = \{(x; x) : x \in X\}$ y es una relación de equivalencia.*

EJEMPLO 18 *Sea X un conjunto y $A \subset X$ un subconjunto suyo. Para $x, y \in X$, decimos que xRy si $x, y \in A$. Las clases de equivalencia en este caso son: si $x \in A, [x] = A$ y si $x \notin A$, $[x] = \{x\}$. El conjunto cociente se denotará por X/A.*

El concepto de clases de equivalencia es generalmente fundamental para:

a) agrupar y representar mediante un único elemento a todos aquellos otros que son equivalentes entre si

b) se logra "unicidad" en muchas estructuras algebraicas que son de importancia en el estudio de las señales y los sistemas dinámicos.

Para ilustrar estas propiedades consideremos los siguientes ejemplos.

1.1 Funciones o Aplicaciones

Considere una relación binaria f definida sobre un conjunto A hasta otro conjunto B, entonces diremos que f es una **función** desde A hasta B, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si $dom\,(f) = A$, es decir que para cada uno de los elementos $a \in A$, existe un $b \in B$ tal que $(a, b) \in F$.

2. Si $(a, b) \in f$ y $(a, c) \in f$, entonces $b = c$.

No se impone restricción alguna sobre el recorrido de f y solo se debe cumplir que

$$imag\,(f) \subset B.$$

Si f es una función, escribimos

$$f : A \to B : a \mapsto b = f\,(a)$$

También es importante recordar que si $(a, b) \in f$, o lo que es lo mismo, afb ó $b = f\,(a)$, diremos que b es la imagen de a bajo f.

DEFINICION 19 *(Función Inyectiva o uno a uno). Una función $f : A \to B$ es* ***uno a uno*** *si y solo si : $\forall x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, o bien es equivalente a decir*

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Note la importancia del sentido de las implicaciones.

EJEMPLO 20 *Sea: $f : R - \{-1\} \to R$ definida por $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. Esta función es uno a uno pues*

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \quad &\in \quad R - \{-1\} \text{ si } f\,(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{2x_1 - 1}{x_1 + 1} = \frac{2x_2 - 1}{x_2 + 1} \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x_1x_2 + 2x_1 - x_2 - 1 = 2x_1x_2 + 2x_2 - x_1 - 1 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

DEFINICION 21 *(Función sobre o epiyectiva) Una función $f : A \to B$ es* ***sobre o epiyectiva*** *si y solo si*

$$\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$$

o bien es equivalente a decir que $imag\,(f) = B$.

EJEMPLO 22 *Sea* $f : R \to [1, +\infty)$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x > 0 \\ x^2 + 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

Esta función es sobreyectiva, pues: Si $x \leq 0 \Rightarrow y = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y - 1}$ *y ya que* $x \leq 0 \Rightarrow x = -\sqrt{y - 1}$*lo que es válido solo si*

$$y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1 \tag{1}$$

Si $x > 0 \Rightarrow y = x + 2 \Leftrightarrow x = y - 2$ *como*

$$x > 0 \Rightarrow y - 2 > 0 \Leftrightarrow y > 2 \tag{2}$$

Luego, efectuando la unión de (1) y (2) resulta que el $imag(f) = [1, +\infty)$ *lo que prueba que* f *es sobreyectiva.*

DEFINICION 23 *(Función biyectiva)Una función* $f : A \to B$ *una* ***función biyectiva*** *si y solo si es : uno a uno y sobreyectiva.*

DEFINICION 24 *(Gráfico de una función) Dada* $f : A \to B$ *una función. Su* ***gráfica*** *se esboza en un sistema coordenado rectangular y está definido mediante un conjunto de puntos*

$$Gf = \{(x, y)/\exists x \in A, \exists y \in B : y = f(x)\}$$

Debido a la definición de la función, el gráfico Gf *de* f *está limitado a curvas en el plano* XY*, y lamentablemente no toda curva es una función.*

TEOREMA 25 *Sea:* $f : A \to B$ *una función,* f *es una biyección si y solo si* f^{-1}*es una función.*
DEMOSTRACION. *Sea* f *una función uno a uno y sobre vamos a probar que* f^{-1} *es una función. Como* f *es sobre todos los elementos de* B *tienen una pre imagen, así que* $\forall y \in B, \exists! x \in A$*, esto por ser uno a uno, tal que* $f^{-1}(y) = x$ *lo que asegura que* f^{-1} *es una función, la implicación recíproca queda propuesta para Ud. La afirmación de esta propiedad, que existe* f^{-1} *equivale a decir que la ecuación* $y = f(x)$*, donde* $y \in B$*, tiene una y solo una solución,* $x \in A$*. Como hemos indicado esta solución se representa por* $f^{-1}(y)$ *así entonces* $x = f^{-1}(y)$ *donde* y *es la variable independiente y* x *es la variable dependiente. La definición de función inversa es análoga a la de relación inversa con ciertas precauciones.* ■

Dada una función biyectiva $f : A \to B$ tal que su gráfica está dada por los puntos

$$Gf = \{(x, y) \in A \times B : \forall x \in A, \exists y \in B : y = f(x)\}$$

El gráfico de f^{-1} puede considerarse el mismo conjunto de puntos que forma la gráfica de f y qué esta viene representada por la ecuación $x = f^{-1}(y)$. Si se quiere dejar la letra x, para la variable independiente (e y para la variable dependiente), la inversa de f vendría representada por la ecuación $y = f^{-1}(x)$.

Sea T un conjunto no vacío, una propiedad interesante sobre este es lo que se conoce como la cardinalidad y que se define como el número de elementos que lo constituye y se denotara por $card\,(T)$. De inmediato, este concepto permite identificar familias de conjuntos que son de alto interés en la teoría general de sistemas.

Un conjunto T se dice ser **finito** si $card\,(T) = n_T \in N$, y por lo tanto, este se puede representar como

$$T = \{t_0, t_1, \ldots, t_{n_T-1}\}$$

Un conjunto T se dice ser **numerable** si se puede establecer una relación biyectiva

$$\Psi : T \to N$$

Por lo tanto, un conjunto T es numerable si sus elementos pueden colocarse en un sucesión infinita

$$T = \{t_0, t_1, \ldots\}$$

Otro concepto relacionado con *los* dos tipos conjuntos definidos es el de conjunto **contable**. Un conjunto T es contable si es finito o numerable.

EJEMPLO 26 *Los siguientes son conjuntos finitos:*

a) El conjunto de todos los estudiantes de Sistemas en un período trimestral dado en año actual.

b) el conjunto de todos los usuarios actuales de internet a nivel mundial.

c) el conjunto de todos los números alfanuméricos que pueden formarse con la combinación de 16 símbolos.

EJEMPLO 27 *Son ejemplos de conjuntos numerables:*

a) el conjunto Z de todos los números enteros, ya que podemos establecer la siguiente relación biyectica $\Psi : Z \to N$, para todo $k \in Z$,

$$\Psi(k) = \begin{cases} 2k+1, & k \geq 0, \\ 2|k|, & k < 0. \end{cases}$$

Es decir,

$$\begin{array}{ccccccc} k & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \cdots \\ \Psi(k) & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \end{array}$$

b) El conjunto de todos los números pares positivos, $Z^p_{\geq 0} = \{0, 2, 4, \ldots\}$ ya que $\Psi : Z^p_{\geq 0} \to N$ definida por $\Psi(k) = k/2$ es una biyecciòn.

c) El conjunto de enteros no negativos, $N_0 = N \cup \{0\}$.

d) Para todo número real positivo h, el conjunto $Z(h) = \{\cdots, -2h, -h, 0, h, 2h, \cdots\}$.

e) Para todo $q \in R, q > 1,$ el conjunto

$$q^{N_0} = \{q^n : n \in N_0\}$$

f) El conjunto $T = \{t_i : i \in Z, t_i < t_j, i < j\} = \{\cdots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2 \cdots\}$.

Todo conjunto infinito que no sea numerable se denomina no-numerable. Demostrar que un conjunto dado es o no numerable no es complicado. Sin embargo, en estas notas nos contentaremos con presentar ciertos resultados de importancia y con referir a la bibliografía dada para consultar sus respectivas demostraciones.

DEFINICION 28 *Dos conjuntos $T^{(1)}, T^{(2)}$ son equivalentes (y se denota por $T^{(1)} \sim T^{(2)}$) si entre sus elementos puede establecerse una relación*

$$\Psi : T^{(1)} \rightarrow T^{(2)}$$

que es biyectiva.

De inmediato podemos concluir que un conjunto es numerable si es equivalente al conjunto de los números naturales N.

2 Definición y Clasificación de Ejes de Tiempo

Fundamental para los conceptos de señales y sistemas dinámicos es el transcurso del tiempo (aunque en muchos casos de interés el tiempo puede representar una variable espacial como en los sistemas de procesamientos de imágenes bidimensionales). El tiempo se concibe como la variable que fluye ordenada e independientemente del fenómeno que se tenga bajo estudio, y todos los cambios dinámicos tanto de las señales como de los sistemas están ordenados por dicho flujo.

DEFINICION 29 *Un eje de "tiempo" (generalizado), base de tiempo o escala de tiempo, T, es un conjunto no vacío, sobre el cual se ha definido una relación de orden parcial "$\leq$ ". Es decir, $(T, \leq)$, es un conjunto parcialmente ordenado. Denotaremos por $\lambda \in T$ a un instante de "tiempo" arbitrario pero determinado.*

En general, se supone que la relación de orden definida sobre una base de tiempo T es total para garantizar que dados $\lambda, \lambda' \in T$ entonces se cumple la llamada ley de tricotomía: una de las siguientes relaciones se cumple

$$\lambda \leq \lambda', \quad \lambda' \leq \lambda, \quad \lambda = \lambda'.$$

Sin embargo, es ciertas situaciones es preferible trabajar con relaciones de orden parcial ya que ofrece mejores representaciones del conocimiento que se tenga sobre un sistema dado, particularmente cuando hay incertidumbres o multiplicidad de trayectorias.

La relación de orden sobre una base de tiempo nos permite definir y emplear términos como el pasado, presente y futuro. Si λ se interpreta como el instante de tiempo actual (presente), entonces el conjunto

$$T_{\lambda)} = \{\tau \in T : \tau < \lambda\}$$

denota el pasado, *mientras* que el conjunto

$$T_{(\lambda} = \{\tau \in T : \tau > \lambda\}$$

representa el futuro.

Es importante notar que de esta manera se ha construido una partición del eje de tiempo T. Se evidencia ya que:

$$T = T_{\lambda)} \cup \{\lambda\} \cup T_{(\lambda}$$

y cada uno de los subconjuntos involucrados $T_{\lambda)}, \{\lambda\}, T_{(\lambda}$ en T son disjuntos tal como se exige en el mundo real donde cada instante de tiempo $\lambda \in T$ cuenta y que no puede ser recapturado tan pronto como el futuro (o el pasado) se hace presente (En los sistemas duales, el tiempo T^{dual} fluye en "dirección" opuesta al tiempo real T, como veremos más adelante.)

El conjunto

$$T_{\lambda]} = \{\tau \in T : \tau \leq \lambda\}$$

representa el pasado que incluye al presente, y el conjunto

$$T_{[\lambda} = \{\tau \in T : \tau \geq \lambda\}$$

denota al futuro incluyendo el presente. Generalmente, en el 90% o más de este curso, no es importante si empleamos intervalos cerrados o abiertos de la base de tiempo T.

En el contexto establecido, $T_{\lambda\rangle}$ denotará ya sea $T_{\lambda]}$ o $T_{\lambda)}$; y de igual manera, $T_{\langle\lambda}$ denotará ya sea $T_{[\lambda}$ o $T_{(\lambda}$. Similarmente, el conjunto $T_{[\lambda_1,\lambda_2)} = \{\lambda \in T : \lambda_1 \leq \lambda < \lambda_2\}$ representa el intervalo $[\lambda_1, \lambda_2)$ que comienza e incluye el tiempo inicial λ_1 hasta el tiempo final λ_2 (excluido). De manera análoga, se definen los intervalos de tiempo

$$\begin{aligned}
T_{(\lambda_1,\lambda_2)} &= \{\tau \in T : \lambda_1 < \tau < \lambda_2\} \\
T_{(\lambda_1,\lambda_2]} &= \{\tau \in T : \lambda_1 < \tau \leq \lambda_2\} \\
T_{[\lambda_1,\lambda_2]} &= \{\tau \in T : \lambda_1 \leq \tau \leq \lambda_2\}
\end{aligned}$$

Mientras que $T_{\langle\lambda_1,\lambda_2\rangle}$ denotará cualquiera de los cuatro intervalos definidos: $T_{(\lambda_1,\lambda_2)}$, $T_{(\lambda_1,\lambda_2]}, T_{[\lambda_1,\lambda_2)}$ o $T_{[\lambda_1,\lambda_2]}$.

Para el intervalo $\langle\lambda_1, \lambda_2\rangle$, λ_1 es conocido como el instante inicial o de comienzo y λ_2 es el instante de tiempo final o de finalización. Note que el intervalo especial $\langle\lambda_1, \lambda_1\rangle$ se refiere ya sea a un conjunto $\{\lambda_1\}$ o al conjunto vacío dependiendo de la naturaleza de la base de tiempo empleada tal como veremos más adelante.

DEFINICION 30 *a) Una base de tiempo T (o un conjunto A no vacío) se dice ser discreta si es un conjunto contable.*

b) Una base de tiempo T (o un conjunto A no vacío) es continua si es un intervalo de números reales de longitud finito o infinita.

EJEMPLO 31 *A continuación se presentan una serie de ejemplos de ejes o bases de tiempo discretas.*

1. *Sea $M \in N$, N el conjunto de los números naturales. Considere un eje de tiempo, T, dado por*

$$T = \underline{M} = \{0, 1, 2, \cdots, M-1\} \subset Z_{\geq 0}$$

con $Z_{\geq 0}$ es el conjunto de los enteros no negativos. Nótese que

$$Z_{\geq 0} = N \cup \{0\}$$

$\underline{M}$ es evidentemente un eje de tiempo discreto.

2. *Sea $h > 0$, un número real arbitrario pero fijo, y $M \in N$, entonces el conjunto*

$$T = \underline{M}(h) = \{0, h, 2h, \cdots, (M-1)h\} \subset R_{\geq 0}$$

con $R_{\geq 0}$ representando al conjunto de números reales no negativos. Nuevamente, al igual que el ejemplo anterior, $\underline{M}(h)$ es un eje de tiempo discreto.

3. *Considere el conjunto*

$$T = \{t_0, t_1, \cdots, t_{i-1}, t_i, \cdots, t_{M-1}\} \subset R$$

donde se cumple que para todo $i, j \in \underline{M}$, con $i < j$, entonces $t_i < t_j$. Claramente, T es una base de tiempo discreta.

Es importante observar de una vez que las bases de tiempo discretas consideradas son "básicamente" el mismo objeto ya que son ***equivalentes****. Esto se observa notando que las funciones*

$$\begin{aligned} \vartheta^{(1)} &: \underline{M} \to \underline{M}(h) \\ \vartheta^{(1)}(k) &= kh \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \vartheta^{(2)} &: \underline{M} \to T \\ \vartheta^{(2)}(k) &= t_k \end{aligned}$$

son biyectivas. ¿Por qué $\underline{M}(h)$ y T son equivalentes? (Establezca una biyección entre las dos bases de tiempo empleando $\vartheta^{(1)}$ y $\vartheta^{(2)}$.)

EJEMPLO 32 *A continuación presentamos unos ejes de tiempo que generalizan en cierto sentido los considerados en el ejemplo anterior.*

1. $T_1 = Z_{\geq 0}, T_2 = Z$ *son ejes de tiempo discreto.*

2. *Sea* $h > 0$*, un número real arbitrario pero fijo, entonces los siguientes conjuntos*

$$\begin{aligned} T_3 &= Z_{\geq 0}(h) = \{0, h, 2h, 3h \cdots\} \\ T_4 &= Z(h) = \{\cdots - 3h, -2h, -h, 0, h, 2h, 3h \cdots\} \end{aligned}$$

   son bases de tiempo discreto.

3. *Considere los conjuntos parcialmente ordenados de números reales*

$$\begin{aligned} T_5 &= \{t_0, t_1, \cdots, t_{i-1}, t_i, \cdots\} \\ T_6 &= \{\cdots, t_{-3}, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, \cdots\} \end{aligned}$$

   donde para $i < j$*, se cumple* $t_i < t_j$*. Entonces* T_5, T_6 *son bases de tiempo discreto.*

Al igual que en el ejemplo anterior, es posible demostrar que las bases de tiempo $T_1, \cdots, T_6$ *son equivalentes. Sin embargo, ninguna de las bases de tiempo presentadas en el ejemplo anterior es equivalente a las consideradas a continuación.*

EJEMPLO 33 *Los siguientes son bases de tiempo continua:*

1. *Para todo* $t_1, t_2 \in R, t_1 < t_2$*, arbitrarios pero fijos, los conjuntos parcialmente ordenados*

$$\begin{aligned} T_1 &= (t_1, t_2) = \{t \in R : t_1 < t < t_2\}, \\ T_2 &= [t_1, t_2) = \{t \in R : t_1 \leq t < t_2\}, \\ T_3 &= (t_1, t_2] = \{t \in R : t_1 < t \leq t_2\}, \\ T_4 &= [t_1, t_2] = \{t \in R : t_1 \leq t \leq t_2\}. \end{aligned}$$

   son bases de tiempo continuas.

2. *Para todos* $t_1, t_2 \in R$*, arbitrarios pero fijos, los siguientes conjuntos parcialmente ordenados*

$$\begin{aligned} T_5 &= (t_1, +\infty), \\ T_6 &= [t_1, \infty), \\ T_7 &= (-\infty, t_2), \\ T_8 &= (-\infty, t_2] \end{aligned}$$

   son ejes de tiempo continuos.

3. *El eje real*

$$T_9 = (-\infty, +\infty)$$

es un eje de tiempo continuo y denominado ***el eje de tiempo real****.*

Todas las bases de tiempo continuas aquí estudiadas son equivalentes entre sí.

Un eje de tiempo T puede ser finito, semi-infinito o bi-infinito, dependiendo si T es de longitud finita, acotado inferior o superiormente o no acotado por la derecha o por la izquierda.

DEFINICION 34 *Sea T una base o eje de tiempo (discreto o continua) dada. se dice que T es:*

1. *Finito si $T = \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle$ con longitud finita. Esto es*

$$long\,(T) = \lambda_2 - \lambda_1 < \infty$$

2. *Semi-infinito si $T = \langle \lambda_1, +\infty \rangle, \lambda_1 \in T$ (acotado por la izquierda o acotado inferiormente) o $T = \langle -\infty, \lambda_2 \rangle, \lambda_2 \in T$ (acotado por la derecha o acotado superiormente).*

3. *Bi-infinito si $T = \langle -\infty, +\infty \rangle$. En otras palabras, T es bi-infinito si no es acotado por la derecha o por la izquierda.*

En general, las bases de tiempo pueden y deben tener una estructura algebraica adicional como para garantizar la factibilidad de ejecución de una serie de operaciones definidas sobre las señales y los sistemas.

DEFINICION 35 *Una base de tiempo dada T se dice ser:*

1. *Cerrada con respecto a desplazamientos si dado un instante de tiempo $\tau \in T$, arbitrario pero fijo, se cumple que para todo $\lambda \in T$, $\lambda + \tau \in T$. Simbólicamente, esto puede representarse como*

$$\tau + T = T$$

2. *Cerrada con respecto a escalamientos (dilataciones o contracciones) si para un número $q \in R_+$, los números reales positivos,, se tiene que para todo $\lambda \in T, q\lambda \in T$. Simbólicamente esto puede representarse como*

$$qT \subset T$$

Si $q > 1$, ($q < 1$) se dice que la base de tiempo es invariante con respecto a dilataciones (contracciones).

3. *Simétrica si para todo $\lambda \in T$, se cumple que $-\lambda \in T$, por lo tanto,*

$$-T = T$$

3 Definición y Clasificación de Señales

Si medimos el voltaje de salida, v, de un amplificador de alta frequencia en un sistema de comunicaciones, es altamente probable que la magnitud de dicha variable fluctúe con el tiempo. Esta señal es posible expresarla como una función de la variable tiempo. Por ejemplo, una señal v puede variar senoidalmente con tiempo:

$$v(t) = 10\sin\left(10^3 t\right)$$

Una señal se dice ser una señal temporal si su valor es una función de tiempo. Por ejemplo, las siguientes son ejemplos de señales temporales

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-3t}\cos(2\pi t), t \in R. \\ y(t) &= \left\{ \begin{array}{cc} -1, & t < 0, \\ t+6, & 0 \le t < 4, \\ 10\cos(2\pi(t-4)), & t \ge 4. \end{array} \right., t \in R \end{aligned}$$

Como también es una señal temporal

$$x(k) = -1 + 3\sin\left(\frac{2\pi}{5}k\right), k \in Z$$

Algunas veces, el valor de las señales varía con la posición espacial y se ven denominadas señales espaciales. Por ejemplo, el desplazamiento de una cuerda en un instante determindado de tiempo, es una variable espacial que depende de la posición

$$z(x) = 5e^{-2x}\cos(2\pi x), x \in [0, L]$$

donde un extremo de la cuerda se encuentra fijo en $x = 0$ mientras que el otro en $x = L$.

También una señal puede variar con la posición espacial y el tiempo simultáneamente. Por ejemplo,

$$d(x,t) = 50e^{-2x}\cos(2\pi x)\sin\left(10^3 t\right), (x,t) \in [0, L] \times R$$

Y podemos generalizar aún más y considerar una señal que dependa de la posición espacial en un espacio tridimensional y del tiempo simultáneamente. Una señal de este tipo puede ser

$$I(x,y,z;t) = \frac{1}{z^2}\left[\frac{\sin(x/z)}{x/z}\right]^2\left[\frac{\sin(y/z)}{y/z}\right]^2 e^{-3|k|}, (x,y,z) \in R^3, k \in Z.$$

Informalmente, una señal es una función de una o más variables independientes. Una señal se dice ser unidimensional si su valor es función de una sola variable, y n-dimensional si su valor depende de n variables independientes. En estas notas solo trabajaremos con señales unidimensionales temporales y/o espaciales, y las denominaremos señales temporales (aunque más adelante estudiaremos señales frecuenciales) y la variable independiente será "tiempo" (generalizado).

Finalmente, ya que las señales representan fenómenos físicos, los valores que estas asumen deberán ser números reales. Sin embargo, por conveniencia matemática, es necesario generalizar la noción de señales reales y suponer que una señal puede asumir valores complejos. Por ejemplo, podemos tener señales del tipo

$$\begin{aligned} v(t) &= (4-j)\, e^{(3+j\pi)t}, t \in R. \\ x(k) &= 3\cos\left(\frac{2\pi}{7}k\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{7}k\right), k \in Z \end{aligned}$$

A continuación, y de ahora en adelante, K representará un conjunto no vacío que en la mayoría de los casos será:

- un conjunto finito de símbolos

$$K = \{\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \zeta\}$$

- un cuerpo de números:

$$\begin{aligned} Q &= \text{ cuerpo de números racionales} \\ R &= \text{cuerpo de números reales} \\ C &= \text{ cuerpo de números complejos} \end{aligned}$$

Una señal, como ya lo hemos dicho, es una función (un ente matemático) que representa (o modela) la variación temporal o espacial (o ambas) de alguna variable física relacionada con un proceso bajo estudio. En consecuencia, una señal v no es más que una representación matemática o modelo de una observación de un determinado proceso físico V. En consecuencia, una señal es una aproximación o abstracción de la realidad. Es decir,

$$v \approx V$$

DEFINICION 36 *La función que se elige para describir una señal es llamada la representación de la señal. El proceso de constituir una representación de la señal se llama modelado de la señal.*

Es a través de este modelo de una señal que esperamos mejorar el entendimiento del proceso físico (o lógico) que nos preocupa.

DEFINICION 37 *Sea $A \subset K$, y suponga que T es una base de tiempo, fija pero arbitraria. Entonces, cualquier función*

$$f : T \to A : \lambda \longmapsto f(\lambda)$$

*es una **señal** con **eje o base de tiempo** T y **rango de señal** A.*

Nota. i) Se supone que λ representa una variable de f dada. ii) la señal debe identificarse unívocamente como un triplete

$$F = \underbrace{señal}_{nombre} = \left(T, A, \underbrace{regla}_{f} \right)$$

No debe sorprender que para facilitar el proceso de aprendizaje y manipulación de las señales, generalmente, no diferenciamos entre la variable F y su representación f (en el entendido de que esta clara su base de tiempo T y rango de valores A).

El conjunto de todas las señales f que comparten un único conjunto o base de tiempo T y un mismo conjunto A de valores, se denotará mediante S. Por lo tanto,

$$S = A^T = \{f/f : T \to A \subset K\}$$

DEFINICION 38 *Considere una señal $f : T \to A : \lambda \longmapsto f(\lambda)$, con eje de tiempo T y conjunto o rango de valores $A \subset K$. La señal f (debería ser $F = \underbrace{señal}_{nombre} = \left(T, A, \underbrace{regla}_{f} \right)$) se dice ser:*

1. *una **señal de tiempo discreto** si su base de tiempo T es discreta.*
2. *una **señal de tiempo contínuo** si su base de tiempo T es continua.*
3. *una **señal cuantizada** si su rango de valores A es discreto.*
4. *una s**eñal analógica** si su rango de valores A es continua.*
5. *una **señal temporal real** si $A \subset R$.*
6. *una **señal temporal compleja** si $A \subset C$.*
7. *una **señal temporal simbólica** si $A \subset K = \{\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \zeta\}$.*

En estas notas, las señales en su mayoría serán analógicas reales. Sin embargo, debido a su importancia en la práctica, trataremos también señales frecuenciales complejas y simbólicas. Además, insistiremos en explotar las analogías *existentes* entre las señales de tiempo discreta y de tiempo continuo.

EJEMPLO 39 *Señales "generalizadas" en el sentido que la definición es idéntica para tiempo continuo como para tiempo discreto.*

EJEMPLO 40 *Escalón Unitario y Rampa Unitaria: estas son dos señales de gran importancia ya que la primera representa o modela cambios abruptos de los valores de una señal, mientras que la segunda representa variaciones lineales de los valores de una señal dada. Ambas señales existen y se definen tanto en su forma de tiempo continuo como la de versión en tiempo discreto. La señal escalón unitario de define como*

$$\begin{aligned} esc &: T \to R \\ esc(\lambda) &= \begin{cases} 1, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

mientras que la señal rampa unitaria se define como

$$\begin{aligned} ramp &: T \to R \\ ramp(\lambda) &= \begin{cases} \lambda, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

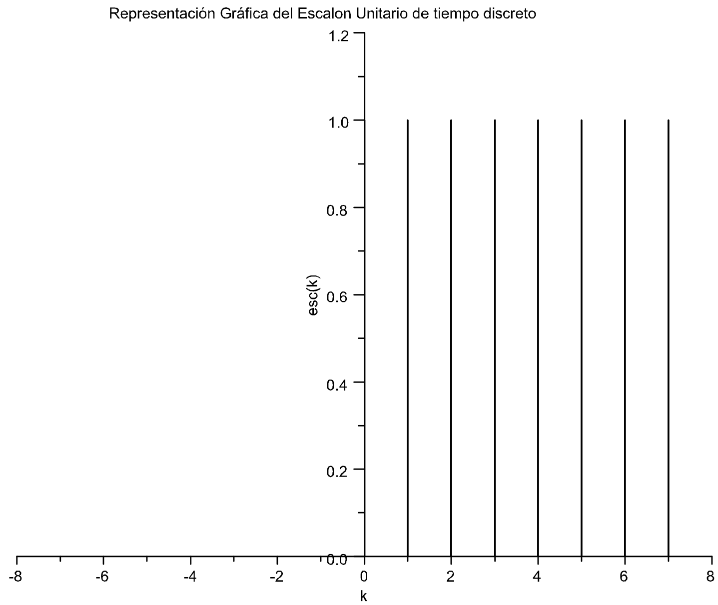
En ambas definiciones la base de tiempo T es cualquiera de los ejes $Z, Z(h)$ o R.

1. *En la figura (40) presentamos el escalón unitario de tiempo discreto generado usando el siguiente programa en Scilab:*

```
clear; clc; close;
L=7; // Límite superior
k=-L:L;
esc=[zeros(1,L), ones(1,L+1)];
a=gca();
a.thickness=2;
a.y_location = "middle";
plot2d3('gnn',k,esc)
xtitle(' Representación Gráfica del Escalon Unitario de tiempo discreto','k','esc(k)');
```

Mientras que en la figura(40) se muestra la señal rampa unitaria de tiempo continua generada por el programa en Scilab:

```
clear; clc; close;
L=7; // Límite superior
t=-L:0.01:L;
ramp=[zeros(-L:0.01:-0.01), 0:0.01:L];
a=gca();
a.thickness=0.5;
a.y_location = "middle";
plot2d3('gnn',t,ramp)
xtitle(' Representación Gráfica de la Rampa Unitaria de tiempo continuo','t','ramp(t)');
```



EJEMPLO 41 *Pulso rectangular: Una de las señales de uso más frecuente en teoría de señales y sistemas es el pulso rectangular de altura unitaria y ancho* 2τ *para algún* $\tau \in T$ *tal que* $2\tau \in T$ *:*

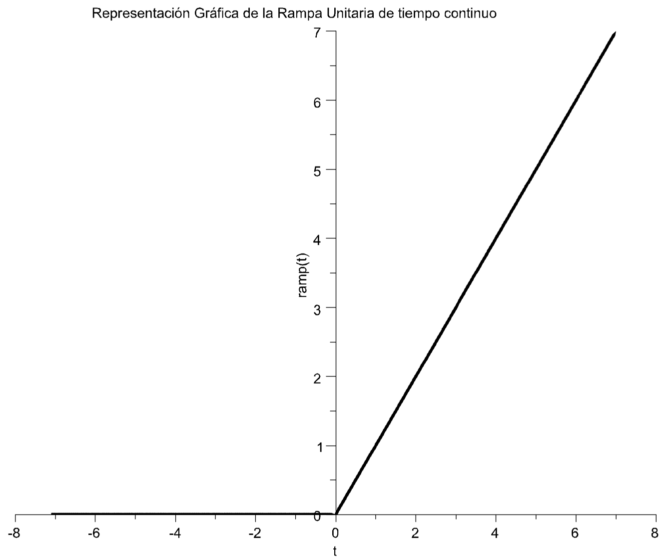
$$\begin{aligned} rect &: T \to R \\ rect_{2\tau}(\lambda) &= \begin{cases} 1, & |\lambda| \leq \tau, \\ 0, & |\lambda| > \tau. \end{cases} \end{aligned}$$

en consecuencia, el pulso rectangular de ancho β *de tiempo continuo es*

$$rect_{\beta}(t) = \begin{cases} 1, & |\lambda| \leq \frac{\beta}{2}, \\ 0, & |\lambda| > \frac{\beta}{2}. \end{cases}$$

el cual se muestra en la figura (41) para $\beta = 7$ *y que ha sido generado en Scilab usando el siguiente código*

```
clear; clc; close;
L=7; // Límite superior
k=-2*L:2*L;
rect=[zeros(1,L), ones(1,2*L+1),zeros(1,L)];
a=gca();
a.thickness=2;
a.y_location = "middle";
plot2d3('gnn',k,esc)
```



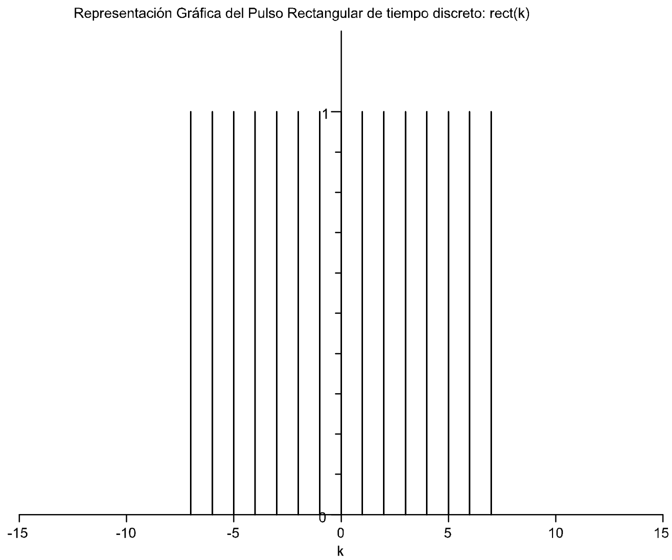
xtitle(' Representación Gráfica del Pulso Rectangular de tiempo discreto','k','rect(k)');

En la figura (41) se muestra la versión de tiempo continuo del pulso rectangular pero en esta ocasión de ancho 1 ($\beta = 0.5$) y la cual se generó usando el siguiente código en Scilab:

```
clear; clc; close;
L=0.5; // Límite superior
t=-2*L:0.001:2*L;
rect=[zeros(-2*L:0.001:-L-0.001), ones(-L:0.001:L),zeros(L+0.001:0.001:2*L)];
a=gca();
a.thickness=0.5;
a.y_location = "middle";
plot2d3(t,rect)
xtitle(' Representación Gráfica del Pulso Rectangular de tiempo continuo','t','rect(t)');
```

EJEMPLO 42 *El pulso triangular: Otra señal bastante empleada en la teoría de señales y sistemas es la señal triangular de altura unitaria y de ancho 2τ para un $\tau \in T$ dado:*

$$\begin{aligned} trian &: T \to A \subset K, \\ trian_{\tau}(\lambda) &= \begin{cases} \frac{\tau - |\lambda|}{\tau}, & -\tau \le \lambda \le \tau, \\ 0, & |\lambda| > \tau. \end{cases} \end{aligned}$$

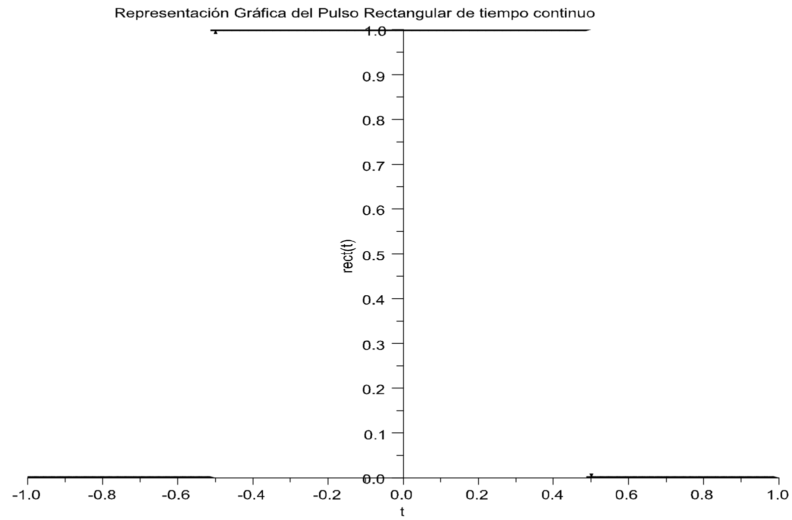


En la figura (42) se presenta la versión de tiempo continuo de la señal triangular y la cual se generó empleando el siguiente código de Scilab:

```
clear ; clc; close ;
k = -7:7;
x1 = [0 0 0 1 2 3 4];
f = [x1 ,5, x1( length (x1) : -1:1) ];
a= gca ();
a.thickness = 2;
a.y_location = "middle";
plot2d3('gnn',k,f)
title('Representación Gráfica de Una Señal Triangular Discreta','k','f(k)');
```

EJERCICIO 43 *Las señales mostradas en la figura (8), fueron generadas usando el siguiente código de Scilab:*

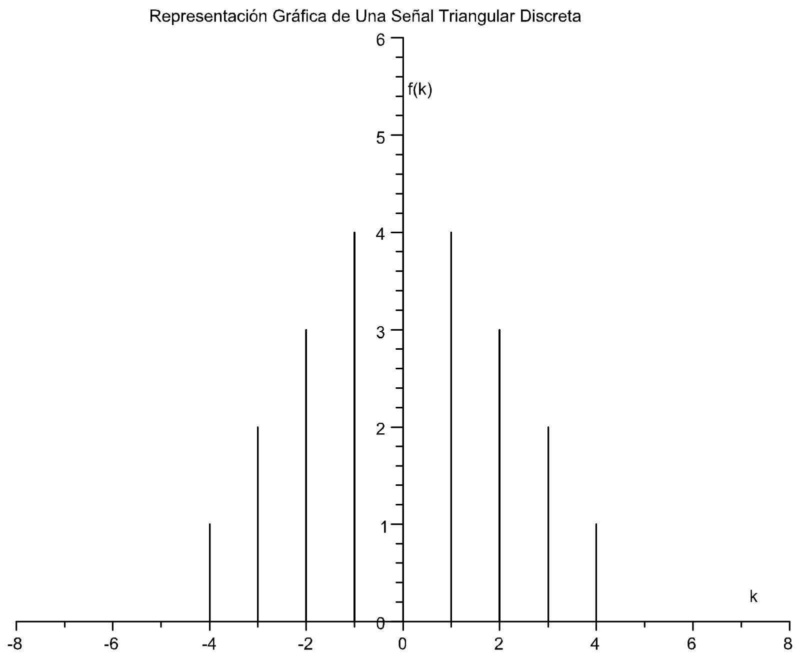
```
clc;
clear all;
n=0:1:10;
l=length(n)-1;
pr=n;
nr=l-n;
subplot(2,2,1);
plot2d3(n,pr);
xlabel('tiempo');
```




```
ylabel('Amplitud');
title('Rampa Creciente de tiempo Discreto');
subplot(2,2,2);
plot(n,pr);
xlabel('tiempo');
ylabel('Amplitud');
title('Señal Rampa de Tiempo Continuo');
subplot(2,2,3);
plot(n,nr);
xlabel('tiempo');
ylabel('Amplitud');
title('Señal Rampa Decreciente');
subplot(2,2,4);
plot2d3(n,nr);
xlabel('tiempo');
ylabel('Amplitud');
title('Rampa Decreciente de Tiempo discreto');
```

2. *Modifique el código para generar las señales triangulares* $f(\lambda) = 10trian_{10}(\lambda), \lambda \in T$, *para los casos donde* T *es una base de tiempo continuo y tiempo discreto respectivamente.*

3. *Repita (1) para las señales* $f(\lambda) = 5triang_{10}(\lambda), \lambda \in T$ *(ambos casos).*



3.1 Señales Periódicas

DEFINICION 44 *Sea f una señal*

$$f : T \to A \subset K$$

donde K es un cuerpo de números dados y T es una base de tiempo arbitraria pero fija. Se dice que la señal f es ***periódica*** *si existe un $P \in T_{[0}$ tal que:*

a) T es cerrado con respecto a traslaciones de P unidades, es decir,

$$\lambda \in T \Rightarrow \lambda + P \in T$$

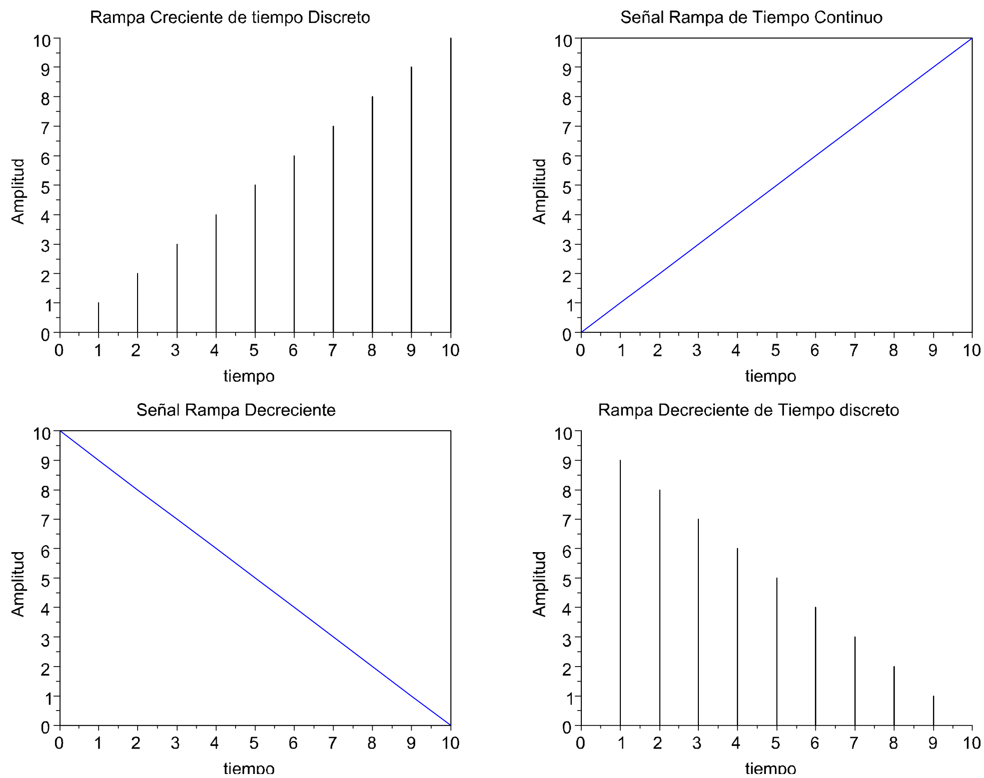
b) para toda $\lambda \in T$ se cumple

$$f(\lambda + P) = f(\lambda)$$

Al más pequeño de tales P se denomina el ***período*** *(fundamental) de la señal f. Cualquier otra señal que no sea periódica se dice ser aperiódica.*

También es importante definir el parámetro

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{P}$$

1. 

la cual se denomina la **frecuencia fundamental** de oscilación o periodicidad de f. Finalmente, el parámetro $1/P$ de la señal periódica es el número de veces por unidad de tiempo en que la señal se repite y se denomina taza de repetición de la señal.

EJEMPLO 45 *Una señal muy empleada en la práctica de los sistemas eléctricos es la señal senoidal la cual definiremos*

$$\begin{aligned} senoid &: T \to R \\ senoid\,(\lambda) &= A \sin\left(2\pi f_0 \lambda + \phi\right) \end{aligned}$$

donde $A.f_0$ y ϕ son constantes denominadas la amplitud, la frecuencia y la fase de la sinusoide. Por conveniencia, se emplea frecuentemente el parámetro

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

ya que la señal senoidal es periódica con período $P = \frac{1}{f_0}$, se deduce que ω_0 es precisamente la frecuencia de oscilación a la que nos referimos en la definición de señal periódica.

Para verificar lo dicho, veamos que si para todo $\lambda \in T$, $\lambda + P \in T$, entonces para

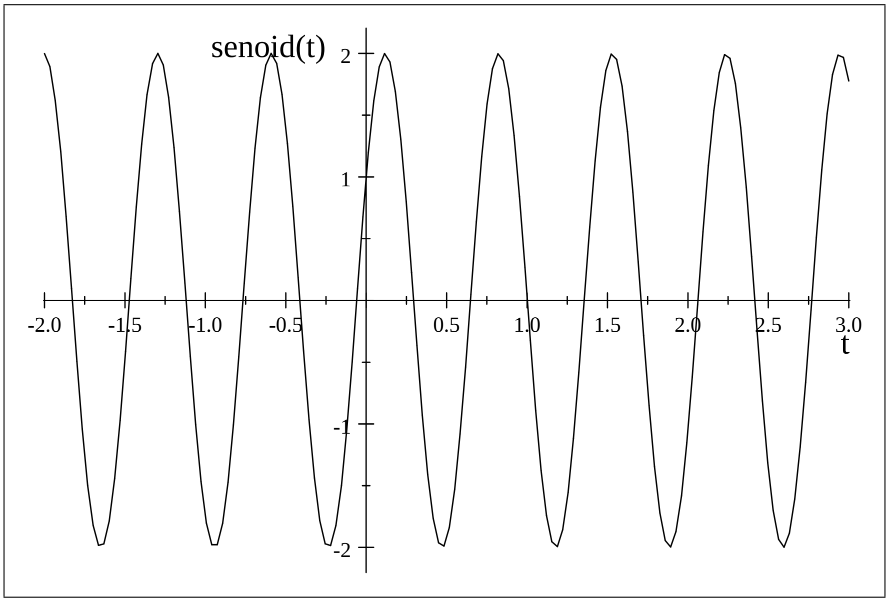


Figure 3: Señal Senoidal de Tiempo continuo

cada $\lambda \in T$:

$$\begin{aligned} senoid\left(\lambda+P\right) &= A\sin\left(2\pi f_0\left(\lambda+P\right)+\phi\right) \\ &= A\sin\left(2\pi f_0\lambda+\phi+2\pi\right) \\ &= A\sin\left(2\pi f_0\lambda+\phi\right)\cos\left(2\pi\right)+A\cos\left(2\pi f_0\lambda+\phi\right)\sin\left(2\pi\right) \\ &= A\sin\left(2\pi f_0\lambda+\phi\right)=senoid\left(\lambda\right) \end{aligned}$$

En la grafica (3) se muestra una señal senoidal de amplitud 2, frecuencia $\sqrt{2}$ *y fase* 30

A continuación presentamos en ejemplos dos señales de gran utilidad práctica en sistemas de comunicaciones: a) señal cuadrada y b) señal diente de sierra

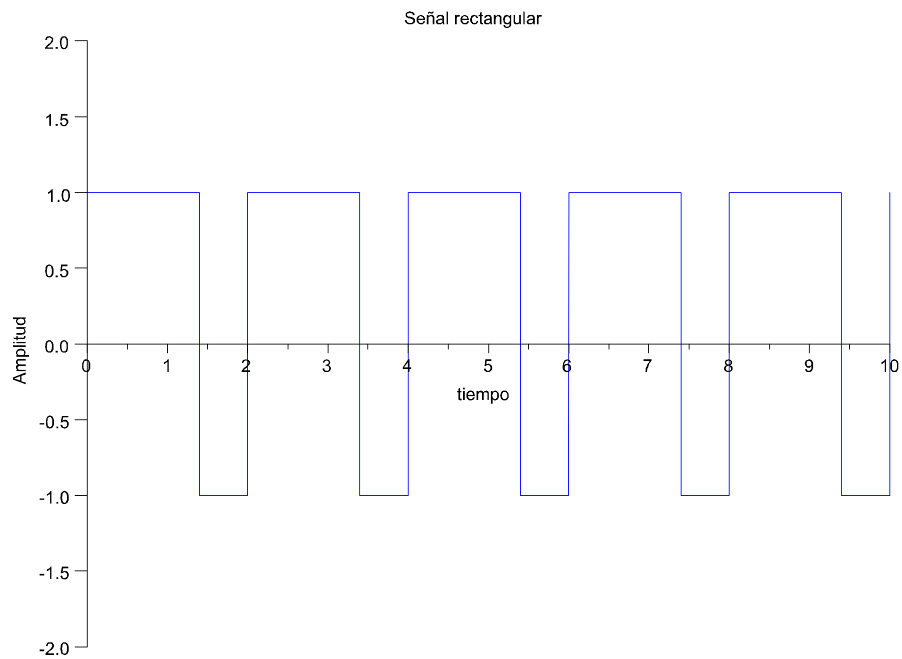
EJEMPLO 46 *Señal rectangular es una señal de periodo P y parámetro h definida por*

$$\begin{aligned} recta_h &: T\rightarrow R \\ recta_h\left(\lambda\right) &= \begin{cases} 1, & 0\leq\lambda<h \\ -1, & h\leq\lambda<P \end{cases} \end{aligned}$$

En consecuencia, el parámetro h representa el intervalo en el cual la señal es positiva durante un período.

En la figura (46) se presenta el caso de una señal rectangular de período $P=2$, de tiempo continuo y generada en Scilab usando el código

```
n=0:0.001:10;
f=0.5;
s=squarewave(2*%pi*f*n,70);
plot(n,s);
xlabel('tiempo');
ylabel('Amplitud');
title('Señal rectangular');
```



3.2 Señales Armónicas

Unas de las señales periódicas más extrañas son las señales armónicas; sin embargo, no toda señal armónica es periódica tal como veremos. Estas señales, al igual que otras que ya hemos visto, existen en las versiones de tiempo discreto como de tiempo continuo.

DEFINICION 47 *Sea $f \in R$, arbitrario pero fijo. La señal armónica arm_f con frecuencia f y base de tiempo T es la señal temporal compleja definida por:*

$$\begin{aligned} arm_f &: T \to C \\ arm_f(\lambda) &= e^{j2\pi f\lambda} \end{aligned}$$

Al parámetro

$$\omega = 2\pi f$$

se denomina la frecuencia angular de la armónica. Más aún, cualquier señal de la forma

$$\begin{aligned} u &: T \to C \\ u(\lambda) &= A \cdot arm_f(\lambda) = Ae^{2\pi f\lambda} \end{aligned} \tag{3}$$

con $A \in C$, se dice ser una señal armónica con amplitud compleja A.

Recodando que todo número complejo $A \in C$ puede representarse en forma polar como

$$A = \alpha e^{j\phi}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha &= |A| = \sqrt{\operatorname{Re}(A)^2 + \operatorname{Im}(A)^2} \\ \phi &= \tan^{-1}\left\{\frac{\operatorname{Im}(A)}{\operatorname{Re}(A)}\right\} \end{aligned}$$

representa la magnitud y fase respectivamente de $A = \operatorname{Re}(A) + j\operatorname{Im}(A)$. Entonces, cualquier señal armónica u (ver (3))

$$\begin{aligned} u(\lambda) &= A \cdot arm_f(\lambda) = Ae^{2\pi f\lambda} \\ &= \alpha e^{j\phi}e^{2\pi f\lambda} = \alpha e^{j(2\pi f\lambda+\phi)} \end{aligned}$$

y empleando la relación de Euler

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

se obtiene la representación de la señal armónica u en forma rectangular:

$$u(\lambda) = \alpha\cos(2\pi f\lambda + \phi) + j\alpha\sin(2\pi f\lambda + \phi)$$

La señal real u_r definida por

$$\begin{aligned} u_r &: T \to R \\ u_r(\lambda) &= \operatorname{Re}\{u(\lambda)\} \\ &= \alpha\cos(2\pi f\lambda + \phi) \end{aligned}$$

se dice ser una señal real armónica (una senoide de frecuencia f, fase ϕ y amplitud A). Más aún, el número complejo $A = \alpha e^{j\phi}$ se denomina el fasor de la señal real armónica u_r.

Hasta ahora, hemos empleado una base de tiempo genérica; sin embargo, cuando particularizamos, encontramos que las señales armónicas de tiempo discreto se comportan distinto de sus contrapartes de tiempo discreto.

Cuando T es un eje de tiempo continuo, entonces la base de tiempo tiene obligatoriamente que ser $T = R$. Entonces para $f \neq 0$, la señal armónica $arm_f : R \rightarrow C$ es periódica con período $P = 1/|f|$ ya que $1/|f|$ es el número real positivo más pequeño para el cual cumple que

$$\begin{aligned} arm_f(P) &= e^{j2\pi f\left(\frac{1}{f}\right)} = \cos(2\pi) + j\sin(2\pi) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Y hemos demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 48 *Para todo $f \in R$, la señal armónica de tiempo continuo*

$$\begin{aligned} arm_f &: R \rightarrow C \\ arm_f(t) &= e^{j2\pi t} \end{aligned}$$

es periódica de período $P = \frac{1}{f}$ si $f \neq 0$. Si $f = 0$, entonces el período es $P = \infty$.

En el caso discreto, la situación es completamente diferente. Por ejemplo, suponga que $h > 0$ y que la base de tiempo es $T = Z(h)$, entonces la señal armónica será de la forma

$$arm_f(kh) = e^{j2\pi fkh}$$

con $k \in Z$, y tratando se actuar y/o obtener resultados similares a lo de la contraparte de tiempo continuo, es natural que nos preguntemos si $arm_f : Z(h) \rightarrow C$ es periódica. Por lo tanto, debemos tratar de encontrar un número positivo $P = ph$ para algún $p \in Z_{(0}$ tal que

$$\begin{aligned} arm_f(kh + P) &= arm_f(kh + ph) \\ &= arm_f(kh) \end{aligned}$$

siempre que tal p exista obviamente.

Noten en primer lugar que si $fh \in Q$, es decir, $fh = \frac{m}{n}, m, n \in Z$,con $n \neq 0$ y m,n coprimos entre sí (no tienen factor común), entonces para cada $k \in Z$:

$$\begin{aligned} arm_f(kh + nh) &= e^{j2\pi f(kh+nh)} \\ &= e^{j2\pi fkh} e^{j2\pi fnh} = e^{j2\pi fkh} e^{j2\pi f\left(\frac{m}{f}\right)} \\ &= e^{j2\pi fkh} e^{j2\pi m} = e^{j2\pi fkh} \{\cos(m2\pi) + j\sin(m2\pi)\} \\ &= e^{j2\pi fkh} = arm_f(kh) \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrados que si $fh \in Q$, entonces arm_f es periódica con período $P = ph$ y $p = |n|$.

Suponga ahora que arm_f es periódica con período $P = ph, p \in Z_{(0}$. Entonces

$$\begin{aligned} arm_f(kh + P) &= arm_f[(k+p)h] \\ &= e^{j2\pi f(k+p)h} = e^{j2\pi fkh} \end{aligned}$$

En consecuencia, para todo $k \in Z$, se cumple

$$e^{j2\pi fph} = 1$$

y por lo tanto,

$$2\pi fph = 2\pi m$$

para $m \in Z - \{0\}$. Es decir:

$$fh = \frac{m}{p} \in Q$$

Hemos demostrados entonces el siguiente resultado.

TEOREMA 49 *La señal armónica de tiempo discreto*

$$\begin{aligned} arm_f &: Z(h) \to C \\ arm_f(kh) &= e^{j2\pi fkh} \end{aligned}$$

con $f \in R$, y $h \in R_{(0}$, es periódica si, y solamente si $fh \in Q$. Es decir, existen enteros coprimos $m, n \in Z, n \neq 0$ tal que $fh = \frac{m}{n}$, y en cuyo caso el período de la señal es $P = |n|\, h$.

Es importante recalcar que el resultado anterior nos dice que no toda señal armónica de tiempo discreto definida sobre la base de tiempo $Z(h)$ es periódica. Dicho resultado es muy diferente para el caso de bases de tiempo continuo como se vio en (48).

COROLARIO 50 *Una señal senoidal*

$$\begin{aligned} senoid &: Z(h) \to R \\ senoid(kh) &= A \sin(2\pi fhk + \phi) \end{aligned}$$

es periódica si y solo si existe un $p \in Z_{(0}$ tal que

$$fh = \frac{m}{p}$$

para un $m \in Z$.

EJEMPLO 51 *De ser periódica, determine el período fundamental de la siguiente senoide de tiempo discreto $T = Z(0.1)$:*

$$senoid(kh) = 4 \sin\left(\frac{72}{19}\pi k + \phi\right)$$

SOLUCION 52 *Nótese que*

$$senoid\,(kh) = 4\sin\left(2\pi\underbrace{\frac{3600}{19}\cdot 0.01}_{fh}k + \phi\right)$$

Por lo tanto

$$fh = \frac{36}{19} \in Q$$

y la señal senoid es periódica. Más aún, como $\frac{36}{19}$ *es irreducible (36 y 19 son coprimos sobre* Z*), el período de senoid es* $P = 19 \cdot 0.01 = 0.19$.

Finalmente presentamos un resultado que tendrá un gran impacto en el estudio y diseño de sistemas de control de datos muestreados.

TEOREMA 53 *Si la base de tiempo* T *es de la forma* $T = Z\,(h)$ *para algún* $h > 0$*, entonces para cada* $f \in R$*, la señal armónica de tiempo discreto*

$$\begin{aligned} arm_f &: Z\,(h) \to C \\ arm_f\,(kh) &= e^{j2\pi fkh} \end{aligned}$$

es tal que para cada $k \in Z, q \in Z_{(0}$ *:*

$$arm_f\,(kh) = arm_{f+qh^{-1}}\,(kh)$$

DEMOSTRACION. *Sea* $k \in Z, j \in Z_{(0}$*, entonces por definición:*

$$\begin{aligned} arm_{f+qh^{-1}}\,(kh) &= e^{j2\pi\left(f+\frac{q}{h}\right)kh} = e^{j2\pi fkh}e^{j2\pi qk} \\ &= e^{j2\pi fkh}\left\{\cos(2\pi qk) + j\sin(2\pi qk)\right\} \\ &= e^{j2\pi fkh} = arm_f\,(kh) \end{aligned}$$

■

En otras palabras, el conjunto "infinito" de señales armónicas

$$\left\{arm_{f+qh^{-1}} : q \in Z_{(0}\right\}$$

en realidad es un conjunto con una sola señal armónica $arm_f\,(kh)$.

EJEMPLO 54 *Considere las siguientes dos señales armónicas de tiempo discreto y base de tiempo* $T = Z\ (0.2)$*:*

$$\begin{aligned} senoid_{1/5}\,(k) &= 3\sin\left(2\pi\frac{1}{5}\cdot 0.2\cdot k + \frac{\pi}{4}\right) \\ senoid_{6/5}\,(k) &= 3\sin\left(2\pi\frac{6}{5}\cdot 0.2\cdot k + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Es evidente que $senoid_{1/5}$, $senoid_{6/5}$ *tienen expresiones analíticas diferentes; sin embargo, como*

$$\frac{6}{5} = \frac{1}{5} + 1\frac{1}{0.2}$$

Entonces por el teorema anterior con $q = 1$, *las dos señales son idénticas sobre* $Z(0.2)$

En sistemas reales, una señal nunca es en realidad periódica porque, podemos suponer que la señal se activó o se inició en algún tiempo finito en el pasado y fenecerá en algún tiempo finito en el futuro. Sin embargo, se encuentran señales que se han repetido un gran número de veces durante un intervalo de tiempo de gran longitud, antes del instante de tiempo en el cual se quiere analizar y se repetirá durante un largo plazo posterior a ese tiempo. Dicha señal es en realidad aperiódica, pero podemos "aproximarla", o mejor dicho modelarla, mediante una señal periódica ya que la experiencia demuestra que el error que se comete es pequeño y los cálculos se simplifican considerablemente.

Ejemplos de señales que pueden representarse mediante señales ideales periódicas son:

1. La posición angular del eje de un generador en una central eléctrica.
2. La señal de sincronización horizontal de un televisor.
3. La señal portadora del subsistema o unidad de transmisión de un sistema de comunicaciones.
4. La vibración de un cristal de cuarzo en un reloj de pulso.
5. La señal de reloj generada por una computadora.
6. Las posiciones de los planetas y de los satélites (naturales y/o artificiales)
7. La temperatura de una zona en particular de un océano dado (Efecto del Niño o la Niña).
8. La señal generada por el corazón de un ser viviente (electrocardiograma).

Como comentario final de esta sección, debemos enfatizar que una señal de tiempo continuo puede tener discontinuidades. Una señal de tiempo continuo

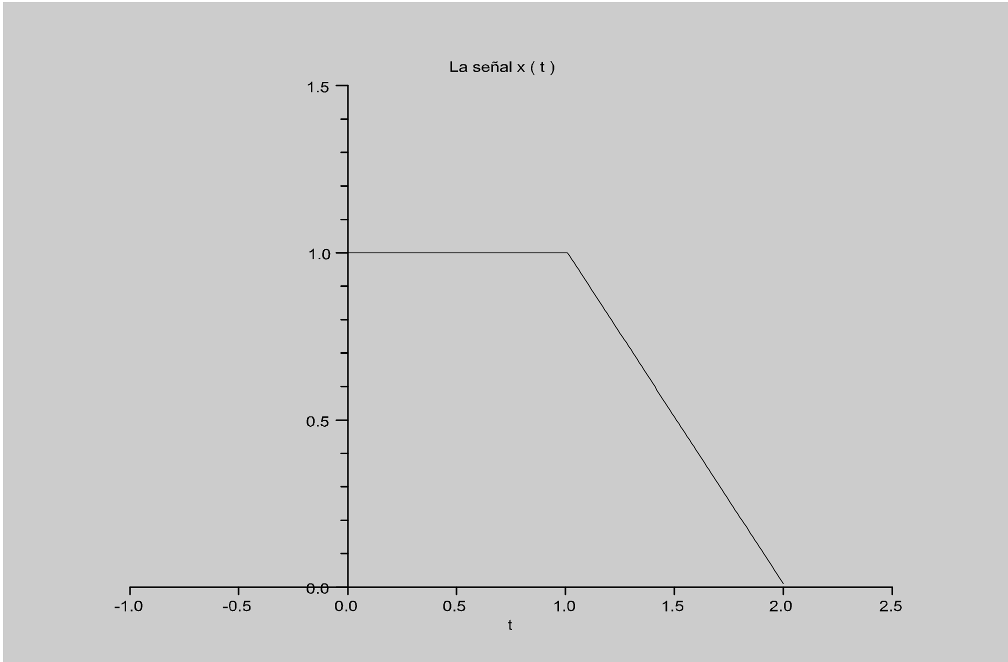
$$f : T \subset R \to K$$

con $K \in \{R, C\}$ se tener una discontinuidad en $t = t_0 \in T$, si para todo $\varepsilon > o$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(t_0 + \varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon \to 0} f(t_0 - \varepsilon)$$

Representaremos al resultado de $\lim_{\varepsilon \to 0} f(t_0 + \varepsilon)$ como $f\left(t_0^+\right)$, y por $f\left(t_0^-\right)$ al límite $\lim_{\varepsilon \to 0} f(t_0 - \varepsilon)$. El valor de la discontinuidad de la señal f en $t = t_0$ se define como

$$f\left(t_0^+\right) - f\left(t_0^-\right)$$



EJEMPLO 55 *Considere la señal de tiempo continuo mostrada en la figura (55)*

tiene una discontinuidad en $t = 0$, *ya que* $x(0^-) = 0$ *y* $x(0^+) = 1$, *y el valor de esta es*

$$x\left(0^+\right) - x\left(0^-\right) = 1 - 0 = 1$$

3.3 Señales Simbólicas

Sea K un conjunto finito

$$K = \{\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N\}$$

cuyos elementos se denominaran símbolos o letras y es especial el signo ε que representa "nada".

Un ejemplo sencillo proviene de los sistemas de transporte; específicamente, considere el conjunto de luces emitidas por un semáforo:

$$K = \{\varepsilon, cero, amarillo, verde, rojo\}$$

donde hemos empleado el símbolo ”*cero*” para representar el caso cuando el semáforo está apagado.

Por otro lado, sea $T \in \{Z, Z(h), R\}$ una base de tiempo (discreta o continua) el cual contiene un subconjunto contable

$$T_e = \{\cdots, \lambda_{-2}, \lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots\} \subset T$$

el cual es también ordenado, en el sentido que para $i \geq j$, entonces $\lambda_i \geq \lambda_j$ para $i, j \in Z$. Y en general, no se conoce de antemano los elementos de T_e ya que la ocurrencia de un $\lambda_i \in T_e$ es aleatoria o probabilística. Es decir, aun conociendo

$$\{\cdots, \lambda_{j-2}, \lambda_{j-1}, \lambda_j\}$$

no podemos enumerar los elementos de

$$T - \{\cdots, \lambda_{j-2}, \lambda_{j-1}, \lambda_j\} = \{\lambda_{j+1}, \lambda_{j+2}, \cdots\}$$

Una señal

$$\begin{aligned} f &: T \to K \\ f(\lambda) &= \alpha(k) \in K, \lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}, k \in Z \end{aligned}$$

se dice ser una señal simbólica.

De inmediato se observa que a diferencia de las señales con valores numéricos, las señales simbólicas son muy complejas ya que no tienen expresiones simbólicas analíticas para su representación, los cambios ocurren en los instantes $t_k \in T_e$ que son completamente desconocidos. Por esas características, la señales simbólicas raramente se representan gráficamente para mostrar su evolución temporal, excepto para casos muy sencillos como por ejemplo cuando $K = \{apagado, encendido\}$; sin embargo, su representación gráfica sigue siendo compleja ya que no se conoce de antemano los instantes t_k cuando la señal puede asumir nuevos valores.

Por lo arriba comentado, las señales simbólicas pueden representarse como una secuencia o cadenas de símbolos tales como

$$...\alpha(k-1)\,\alpha(k)\,\alpha(k+1)\,\alpha(k+2)\,....$$

A tales cadenas de símbolos se denominan palabras w sobre el alfabeto K.

Por ejemplo, si $K = \{apagado, amarillo, verde, rojo\}$, las siguientes son posibles palabras

$$\begin{aligned} w^{(1)} &= apagado, rojo, verde, amarillo, rojo, verde, amarillo, apagado \\ w^{(2)} &= apagado, verde, amarillo, rojo, apagado \\ w^{(3)} &= apagado \\ w^{(4)} &= verde \end{aligned}$$

y mediante la representación lógica de la señal usando las posibles palabras que pueden dar lugar a una señal simbólica dado, nos concentramos en la secuencia de los valores de la señal y no de los tiempos cuando ocurren los cambios de los valores. Noten que $\varepsilon = "apagado"$.

En la mayoría de las situaciones prácticas, es importante que K tenga un símbolo el cual nos permita denotar cuando no sucede nada. Dicho símbolo se denota generalmente por $\varepsilon = "."$.

Las señales simbólicas aparecen de una manera natural en el estudio, diseño y operación de los llamados sistemas secuenciales, autómatas o sistemas de eventos discretos.

3.4 Señales Causales y Anticausales

En la práctica, no existen señales con duración finita. Para ser más precisos considere una señal arbitraria

$$u : T \to A \subset K$$

donde en esta oportunidad no impondremos restricción alguna sobre el conjunto K.

Ahora bien, definiremos como el elemento neutro de K a un elemento "cero" denotado por $\square \in K$ el cual definiremos por

$$\square = \begin{cases} 0, & K \in \{R, C\} \\ \varepsilon, & K = \{\varepsilon.\alpha_1, \cdots, \alpha_{N-1}\} \end{cases}$$

Se define como el soporte de la señal u al intervalo $[\lambda_1, \lambda_2] \subset T$, de longitud más pequeña tal que

$$u(\lambda) = \begin{cases} \neq \square, & \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2] \\ \square, & \lambda \notin [\lambda_1, \lambda_2] \end{cases}$$

y se denota por

$$soport(u) = [\lambda_1, \lambda_2]$$

y su longitud es $\lambda_2 - \lambda_1$.

En la práctica, todas las señales reales son de duración finita en el sentido que la longitud de $soport(u)$ es finita. Sin embargo, resulta conveniente matemáticamente aproximarlas mediantes señales con bases de tiempo de longitud infinita. En algunas situaciones tales como en el estudio de señales o procesos estocásticos (ruido por ejemplo) o en el análisis de estabilidad de sistemas lineales, es conveniente asumir que las señales son de duración infinita con el objeto de encontrar fácilmente resultados y métodos de diseños muy transparentes.

DEFINICION 56 *Una señal $u : T \to A \subset K$ se dice ser:*

1. *causal si*

   (a) *la base de tiempo es infinita positiva, $T = T_{[\lambda_0}$, o*

   (b) *T es infinito y para todo $\lambda \in T_{\lambda_0)}$ se tiene que $u(\lambda) = \square$.*

2. *anticausal si*

   (a) *la base de tiempo es infinita negativa, $T = T_{\lambda_0)}$, o*

   (b) *T es infinito y para todo $\lambda \in T_{[\lambda_o}$ se tiene que $u(\lambda) = \square$.*

De inmediato, una señal $uT \to A \subset K$ es:
a) causal si y solo si $soport(u) \subset [\lambda_0, +\infty)$,
b) anticausal si y solo si $soport(u) \subset (-\infty, \lambda_0)$.

Ilustraremos el concepto de señales causales empleando las señales que hemos definidos hasta ahora.

1. La señal escalón unitario $esc(\lambda), \lambda \in T$ es causal..

2. La señal rampa unitaria $ramp(\lambda), \lambda \in T$ es causal.

3. La señal pulso rectangular $rect_{2\tau}(\lambda), \lambda \in T$ no es causal o anticaulsal.

4. La señal triángulo unitario $triang_{\tau}(\lambda) .\lambda \in T$, no es causal o anticausal.

References

[1] Mason, Samuel J.y H.J. Zimmermann. "Circuitos, señales y Sistemas electrónicos". CICSA, Ciudad de Mexico. Mexico 1962.

[2] Klir, George J. "An Approach to General Systems theory". Van Nostrand Reinhold Company. New York. USA. 1969.

[3] Ziegler, P., H., Praehofer, T. G.Kim. "Theory of Modeling and Simulation", Second Edition. Academic Press. San Diego. USA, 2000.

[4] Kolmogorov, A.N. y S.V. Fomin. "Elementos de la Teoría de Funciones y del Análsis Funcional". Segunda Edición. Editorial MIR. Moscú, Rusia. 1975

[5] Kwakernaak, H. y R. Sivan. "Modern Signals and Systems". Prentice Hall. New Jersey. USA. 1991

[6] Lindner, K.D., "Introducción a las Señales y los Sistemas". McGraw Hill. Colombia. 2002.

[7] Ziemer R. E.,W. Tranter, D. Fannin. "Signals and Systems: Continuous and Discrete". Second Edition. MacMillan Publishing Company. New York, USA. 1989

[8] http://es.scribd.com/doc/62488949/Lab-1